ECRICOME CONCOURS D'ADMISSION 2004
MATHEMATIQUES Option Technologique

Aucun document n'est autorisé. Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie,à mettre en évidence les principaux résultats,à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes mais brèves de leurs affirmations.

1.EXERCICE

L'exercice se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in N, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

La fonction f étant définie sur R par :

pour tout x réel, $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$

1.1 **Etude d'une fonction g intermédiaire**.

On considère la fonction g définie sur R^+ par :

pour $t \geq 0, g(t) = \dfrac{t}{t+1} - \ln(1+t)$

1-Déterminer la fonction dérivée g' de g et en donner son signe sur R^+.

2-En déduire les variations de la fonction g et montrer que : pour $t \geq 0, g(t) \leq 0$.

1.2**.Etude de la fonction** f

1-Démontrer que l'on a , pour tout x réel : $f'(x) = e^{-x}g(e^x)$

2-Etudier alors les variations de la fonction f.

3-Sachant que $\ln 2 \approx 0{,}69$ et que $\dfrac{\ln(1+e)}{e} \approx 0{,}48$,montrer que l'on a,pour tout x de l'intervalle [0 ;1] : $0 \leq f(x) \leq 1$

1**.3.Convergence de la suite** $(u_n)_{n\in N}$

1-Justifier que pour tout x de[0 ;1] : $|f'(x)| \leq |g(e)|$

2-On considère la fonction h définie sur [0 ;1] par : $h(x) = f(x) - x$

a- Montrer que h est une fonction strictement décroissante sur [0 ;1].

b- Prouver que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle[0 ;1].

c- En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur [0 ;1].

3-Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel : $0 \leq u_n \leq 1$

4-Montrer que ,pour tout n entier naturel : $|u_{n+1} - \alpha| \leq |g(e)||u_n - \alpha|$

Ainsi que : $|u_n - \alpha| \leq |g(e)|^n$

5- Sachant que $|g(e)| < 0{,}6$,déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in N}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2.EXERCICE

On considère les suites réelles u et v définies par leur premier terme $u_0 = 1, v_0 = 0$ et les relations de récurrence :

Pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}v_n - \frac{3}{4} \\ v_{n+1} = u_n + \frac{5}{4}v_n - \frac{3}{4} \end{cases}$.

1- On pose : $\forall n \in N, \begin{cases} w_n = u_n + v_n + 6 \\ v_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2} \end{cases}$

a- Montrer que les suites $(w_n)_{n\in N}$ et $(t_n)_{n\in N}$ ainsi définies sont des suites géométriques.

b- Déterminer w_n et t_n en fonction de l'entier n.

c- Montrer que les suites $(w_n)_{n\in N}$ et $(t_n)_{n\in N}$ sont convergentes et donner leur limite.

d- En déduire la convergence des suites $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ et donner leur limite.

2- On note A la matrice carrée réelle d'ordre 2, et B la matrice unicolonne réelle, définies par : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + B$

a- Expliciter A et B .

b- Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Démontrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

c- Montrer que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

d- I étant la matrice carrée unité d'ordre 2, montrer que : $P(D-I)P^{-1} = A - I$.

e- En déduire que la matrice $A-I$ est inversible et déterminer son inverse $(A-I)^{-1}$

f- Résoudre l'équation : $(A-I)X + B = 0$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est la matrice réelle inconnue.

g- Vérifier enfin que : $X = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \end{pmatrix}$

3. EXERCICE.

Chaque jour ,une entreprise envoie un colis. Elle utilise les services des sociétés de transport A ou B.

La probabilité pour que la société A livre le colis avec retard est de 0,1, alors que la probabilité pour que la société B livre avec retard est de 0,2. On suppose les retards successifs indépendants. On se propose d'étudier diverses situations liées à ces données. Les hypothèses données pour une situation ne sont valables que pour une seule situation.

3.1.Situation 1

L'entreprise décide d'utiliser la société A pendant n jours consécutifs. (n étant un entier naturel non nul). On note X la variable aléatoire égale au nombre de jours où le colis arrive en retard.

1-Déterminer la loi de X.

2-Donner la valeur de l'espérance E(X) de X .

3-La société A fait payer à l'entreprise un prix de 8 euros par colis livré sans retard, la livraison étant gratuite pour tout colis livré avec retard. On note W le prix payé par l'entreprise sur une période de n jours.

a- Exprimer W en fonction de X.

b- En déduire le prix moyen payé par l'entreprise sur la période de n jours.

3.2.Situation 2

Pour des raisons tarifaires,l'entreprise décide d'utiliser la société B dans 60 % des cas, et la société A dans 40 % des cas.

1- Un jour donné,calculer la probabilité que le colis arrive en retard.

2- Un jour donné ,le colis arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait été livré par la société A ?

3.3.Situation 3

L'entreprise tente l'expérience suivante : à partir d'un jour donné que l'on notera le jour 1, elle décide d'utiliser la société A ,jusqu'à ce qu'un colis soit livré avec retard. A partir du jour suivant,elle utilisera la société B. On note Y la variable aléatoire représentant le numéro du jour où pour la première fois l'entreprise utilise la société B.

1- Justifier que l'ensemble des valeurs prises par Y est égal à $N^* \backslash \{1\}$

2- Montrer que : $\forall k \in N^* \backslash \{1\}\ P(Y = k) = (0,1)(0,9)^{k-2}$

3- Vérifier par le calcul que : $\sum_{k=2}^{+\infty} P(Y = k) = 1$.

3.4.Situation 4

On suppose que la masse d'un colis exprimée en kilogrammes,est une variable aléatoire M qui suit une loi exponentielle de paramètre 2.

1-Rappeler l'expression d'une densité de M,ainsi que l'expression de sa fonction de répartition.

2- Donner la valeur de l'espérance de M

3-Déterminer les valeurs exactes des probabilités suivantes :

$$P(M \leq 1,5), P(M \geq 2), P(1,5 \leq M \leq 2)$$

4- Pour calculer le prix d'envoi d'un colis en euros,la société B multiplie la masse en kilogramme du colis par deux,auquel elle ajoute une taxe forfaitaire de 3 euros. On note E, le prix d'envoi d'un colis.

a- Exprimer E en fonction de M.

b- Déterminer la fonction de répartition G de E.